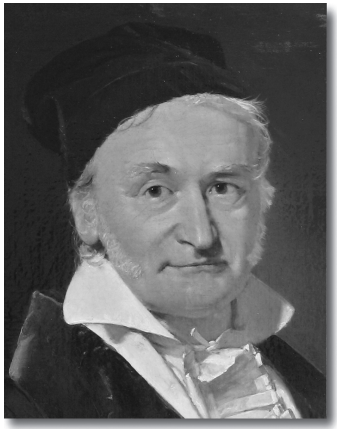
Annexes

Gradient, divergence et théorème de la divergence



Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

EPFL

- **Champ scalaire :** un champ scalaire f est une fonction scalaire du vecteur position $\boldsymbol{r}$: $f \equiv f(\boldsymbol{r})$

- **Vecteur position :** en coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$

$$\boldsymbol{r}(x, y, z) = x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}} + z\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{A.1}$$

- **Vecteur déplacement infinitésimal :** en coordonnées cartésiennes

$$d\boldsymbol{r}(x, y, z) = dx\,\hat{\boldsymbol{x}} + dy\,\hat{\boldsymbol{y}} + dz\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{A.2}$$

- **Différentielle du champ scalaire :** $f(x, y, z)$ en coordonnées cartésiennes

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\,dz \tag{A.3}$$

- **Différentielle du champ scalaire :** $f(x, y, z)$ (A.3) remis en forme

$$\begin{aligned} df(x, y, z) = &\left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\,\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{z}}\right) \\ &\cdot\left(dx\,\hat{\boldsymbol{x}} + dy\,\hat{\boldsymbol{y}} + dz\,\hat{\boldsymbol{z}}\right) \end{aligned} \tag{A.4}$$

- **Différentielle du champ scalaire :** $f(x,y,z)$ comme produit scalaire

$$df(x,y,z) = \frac{df(x,y,z)}{d\boldsymbol{r}(x,y,z)} \cdot d\boldsymbol{r}(x,y,z) \equiv \boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) \cdot d\boldsymbol{r}(x,y,z) \quad \text{(A.5)}$$

- **Gradient du champ scalaire :** $f(x,y,z)$ (A.2) dans (A.4) et (A.5)

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\,\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{z}} \quad \text{(A.6)}$$

- **Opérateur gradient :** en coordonnées cartésiennes

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\boldsymbol{x}}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\,\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{(A.7)}$$

- **Opérateur gradient :** vecteur ligne en coordonnées cartésiennes

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

- **Champ scalaire homogène :** $f(x,y,z)$ indépendant de la position et de ses coordonnées.

$$f(x,y,z) = f_0 = \text{cste} \qquad \text{(homogène)} \tag{A.8}$$

- **Gradient du champ scalaire homogène :** (A.6) où $f(x,y,z) = f_0$

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = \boldsymbol{\nabla} f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial x}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f_0}{\partial y}\,\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial f_0}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{0} \tag{A.9}$$

- **Champ scalaire unidimensionnel :** $f(x,y,z)$ indépendant de y et z.

$$f(x,y,z) = f(x) \qquad \text{(unidimensionnel)} \tag{A.10}$$

- **Gradient du champ scalaire unidimensionnel :** (A.6) où $f(x,y,z) = f(x)$

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = \boldsymbol{\nabla} f(x) = \frac{df(x)}{dx}\,\hat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{(unidimensionnel)} \tag{A.11}$$

- **Champ vectoriel :** un champ vectoriel $\boldsymbol{f}$ est une fonction vectorielle du vecteur position $\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$. Chaque composante cartésienne est une fonction des coordonnées cartésiennes (x, y, z) du vecteur position $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = f_x(x, y, z)\,\hat{\boldsymbol{x}} + f_y(x, y, z)\,\hat{\boldsymbol{y}} + f_z(x, y, z)\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{A.12}$$

- **Divergence du champ vectoriel :** $\boldsymbol{f}(x, y, z)$ en coordonnées cartésiennes (A.7) et (A.12)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f}(x, y, z) = &\left(\hat{\boldsymbol{x}}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\\ &\cdot \left(f_x(x, y, z)\,\hat{\boldsymbol{x}} + f_y(x, y, z)\,\hat{\boldsymbol{y}} + f_z(x, y, z)\,\hat{\boldsymbol{z}}\right)\end{aligned} \tag{A.13}$$

- **Divergence du champ vectoriel :** $\boldsymbol{f}(x, y, z)$ (A.13) remis en forme

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f}(x, y, z) = \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_z(x, y, z)}{\partial z} \tag{A.13}$$

- **Champ vectoriel uniforme :** $\boldsymbol{f}(x, y, z)$ indépendant de la position et de ses coordonnées.

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \boldsymbol{f_0} = f_{0x}\,\hat{\boldsymbol{x}} + f_{0y}\,\hat{\boldsymbol{y}} + f_{0z}\,\hat{\boldsymbol{z}} = \textbf{cste} \qquad \text{(uniforme)} \qquad \text{(A.14)}$$

- **Divergence du champ vectoriel uniforme :** (A.13) où $\boldsymbol{f}(x, y, z) = \boldsymbol{f}_0$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f}(x, y, z) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f_0} = \frac{\partial f_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial f_{0y}}{\partial y} + \frac{\partial f_{0z}}{\partial z} = 0 \qquad \text{(A.15)}$$

- **Champ vectoriel unidimensionnel :** $\boldsymbol{f}(x, y, z)$ indépendant de y et z.

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = f_x(x)\,\hat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{(unidimensionnel)} \qquad \text{(A.16)}$$

- **Divergence du champ vectoriel unidimensionnel :** (A.13) où $\boldsymbol{f}(x, y, z) = f_x(x)\,\hat{\boldsymbol{x}}$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f}(x, y, z) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \Big(f_x(x)\,\hat{\boldsymbol{x}}\Big) = \frac{df_x(x)}{dx} \qquad \text{(unidimensionnel)} \quad \text{(A.17)}$$

- **Opérateur Laplacien :** divergence de l'opérateur gradient (A.7)

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \left(\hat{\boldsymbol{x}}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{\boldsymbol{x}}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\,\frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \text{(A.18)}$$

- **Opérateur Laplacien :** (A.18) en coordonnées cartésiennes

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{(A.19)}$$

- **Laplacien du champ scalaire :** $f\,(x,y,z)$ (A.19)

$$\boldsymbol{\nabla}^2 f\,(x,y,z) = \frac{\partial^2 f\,(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f\,(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f\,(x,y,z)}{\partial z^2} \quad \text{(A.20)}$$

- **Champ scalaire homogène :** $f\left(x,y,z\right)$ indépendant de la position et de ses coordonnées.

$$f\left(x,y,z\right)=f_0=\mathrm{cste}\qquad\text{(homogène)}\tag{A.8}$$

- **Laplacien du champ scalaire homogène :** (A.20) où $f\left(x,y,z\right)=f_0$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\ f\left(x,y,z\right)=\boldsymbol{\nabla}^2\ f_0=\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2}=0\tag{A.21}$$

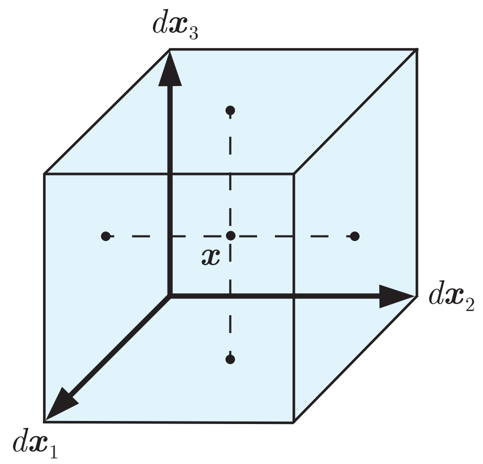
- **Champ scalaire unidimensionnel :** $f\left(x,y,z\right)$ indépendant de y et z.

$$f\left(x,y,z\right)=f\left(x\right)\qquad\text{(unidimensionnel)}\tag{A.10}$$

- **Laplacien du champ scalaire unidimensionnel :** (A.20) où $f\left(x,y,z\right)=f\left(x\right)$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\ f\left(x,y,z\right)=\boldsymbol{\nabla}^2\ f\left(x\right)=\frac{d^2 f\left(x\right)}{dx^2}\qquad\text{(unidimensionnel)}\tag{A.22}$$

- **Système local :** cube de volume infinitésimal centré autour du point $\boldsymbol{x}$ engendré par les vecteurs infinitésimaux orthogonaux $d\boldsymbol{x}_1$, $d\boldsymbol{x}_2$ et $d\boldsymbol{x}_3$.



1. **Centres faces :** avant $(+)$ et arrière $(-)$

$$\boldsymbol{x} \pm \frac{1}{2}\, d\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x} \pm \frac{1}{2}\, dx_1\, \hat{\boldsymbol{x}}_1 \tag{A.23}$$

2. **Centres faces :** droite $(+)$ et gauche $(-)$

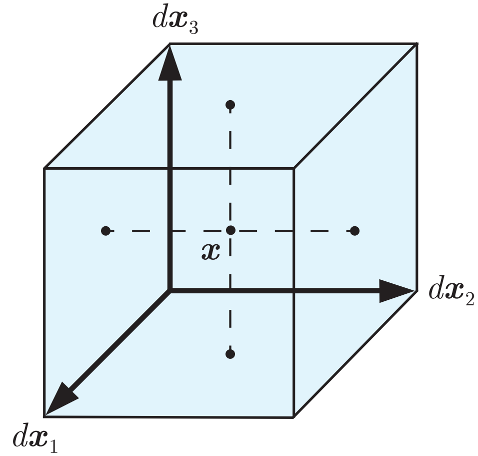
$$\boldsymbol{x} \pm \frac{1}{2}\, d\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x} \pm \frac{1}{2}\, dx_2\, \hat{\boldsymbol{x}}_2 \tag{A.24}$$

3. **Centres faces :** supérieure $(+)$ et inférieure $(-)$

$$\boldsymbol{x} \pm \frac{1}{2}\, d\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x} \pm \frac{1}{2}\, dx_3\, \hat{\boldsymbol{x}}_3 \tag{A.25}$$

- **Volume :** cube infinitésimal centré autour du point $\boldsymbol{x}$

$$dV\left(\boldsymbol{x}\right) = dx_1\, dx_2\, dx_3 \tag{A.26}$$



1. **Surface faces :** avant $(+)$ et arrière $(-)$

$$d\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{x} \pm \frac{1}{2}\, d\boldsymbol{x}_1\right) = \pm\, d\boldsymbol{S}_1 = \pm\, dS_1\, \hat{\boldsymbol{x}}_1 = \pm\, dx_2\, dx_3\, \hat{\boldsymbol{x}}_1 \tag{A.27}$$

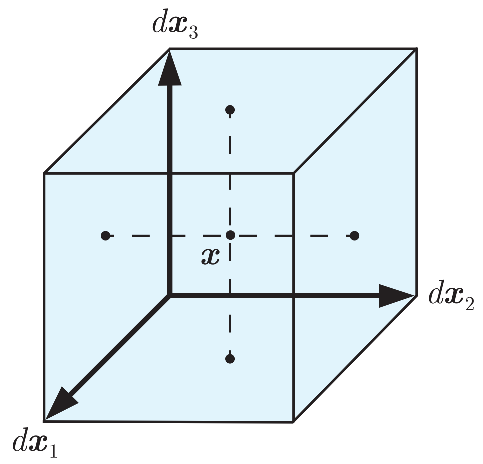
2. **Surface faces :** droite $(+)$ et gauche $(-)$

$$d\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{x} \pm \frac{1}{2}\, d\boldsymbol{x}_2\right) = \pm\, d\boldsymbol{S}_2 = \pm\, dS_2\, \hat{\boldsymbol{x}}_2 = \pm\, dx_3\, dx_1\, \hat{\boldsymbol{x}}_2 \tag{A.28}$$

3. **Surface faces :** supérieure $(+)$ et inférieure $(-)$

$$d\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{x} \pm \frac{1}{2}\, d\boldsymbol{x}_3\right) = \pm\, d\boldsymbol{S}_3 = \pm\, dS_3\, \hat{\boldsymbol{x}}_3 = \pm\, dx_1\, dx_2\, \hat{\boldsymbol{x}}_3 \tag{A.29}$$

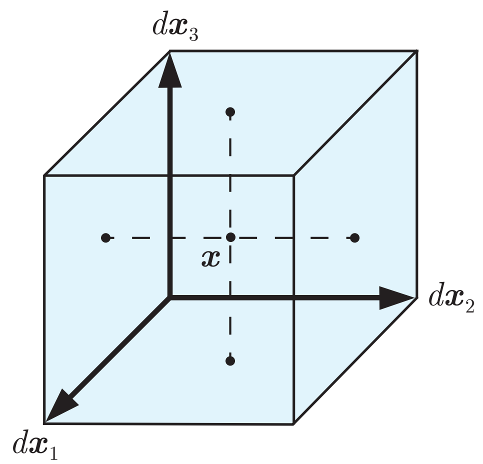
- **Flux total :** le flux total du champ vectoriel $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ à travers le cube infinitésimal centré en $\boldsymbol{x}$ est la somme des flux à travers les six faces.



- **Flux total :** du champ vectoriel $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ à travers le cube infinitésimal.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \tag{A.30}$$

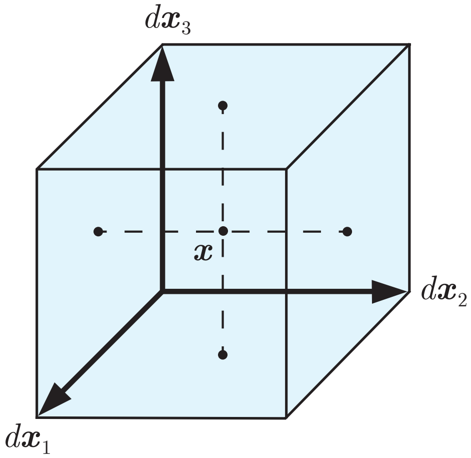
$$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\,d\boldsymbol{x}_1\right)\cdot d\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\,d\boldsymbol{x}_1\right)+\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\,d\boldsymbol{x}_1\right)\cdot d\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\,d\boldsymbol{x}_1\right)$$
$$+\,\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\,d\boldsymbol{x}_2\right)\cdot d\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\,d\boldsymbol{x}_2\right)+\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\,d\boldsymbol{x}_2\right)\cdot d\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\,d\boldsymbol{x}_2\right)$$
$$+\,\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\,d\boldsymbol{x}_3\right)\cdot d\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\,d\boldsymbol{x}_3\right)+\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\,d\boldsymbol{x}_3\right)\cdot d\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\,d\boldsymbol{x}_3\right)$$



- **Flux total :** du champ vectoriel $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$: (A.23) - (A.29) dans (A.30)

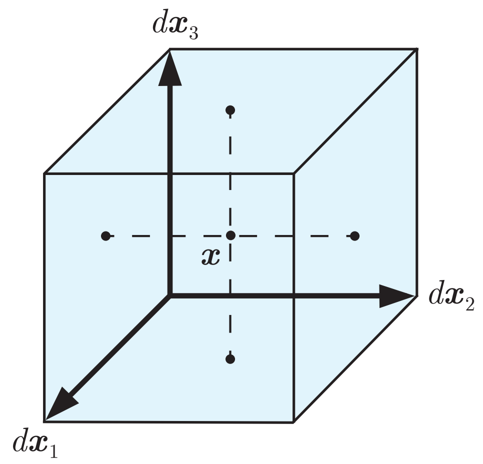
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \tag{A.31}$$

$$\left(\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\,dx_1\,\hat{\boldsymbol{x}}_1\right) - \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\,dx_1\,\hat{\boldsymbol{x}}_1\right)\right) \cdot \left(dx_2\,dx_3\,\hat{\boldsymbol{x}}_1\right)$$
$$+ \left(\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\,dx_2\,\hat{\boldsymbol{x}}_2\right) - \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\,dx_2\,\hat{\boldsymbol{x}}_2\right)\right) \cdot \left(dx_3\,dx_1\,\hat{\boldsymbol{x}}_2\right)$$
$$+ \left(\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\,dx_3\,\hat{\boldsymbol{x}}_3\right) - \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\,dx_3\,\hat{\boldsymbol{x}}_3\right)\right) \cdot \left(dx_1\,dx_2\,\hat{\boldsymbol{x}}_3\right)$$



- **Développement limité :** au 1^{er} ordre du champ vectoriel $\boldsymbol{f}$ autour de $\boldsymbol{x}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x} \pm \frac{1}{2}\, dx_1\, \hat{\boldsymbol{x}}_1\right) &= \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right) \pm \frac{1}{2}\, \frac{\partial \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_1}\, dx_1 \\
\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x} \pm \frac{1}{2}\, dx_2\, \hat{\boldsymbol{x}}_2\right) &= \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right) \pm \frac{1}{2}\, \frac{\partial \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_2}\, dx_2 \\
\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x} \pm \frac{1}{2}\, dx_3\, \hat{\boldsymbol{x}}_3\right) &= \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right) \pm \frac{1}{2}\, \frac{\partial \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_3}\, dx_3
\end{aligned} \tag{A.32}$$



- **Flux total :** champ vectoriel $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$: (A.32) dans (A.31) donne (A.33)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial x_3} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}_3 \right) dx_1\, dx_2\, dx_3$$

- **Flux total :** champ vectoriel $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x})\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + f_2(\boldsymbol{x})\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + f_3(\boldsymbol{x})\,\hat{\boldsymbol{x}}_3$: (A.26) dans (A.33)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3(\boldsymbol{x})}{\partial x_3} \right) dx_1\, dx_2\, dx_3$$

- **Flux total :** remis en forme

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \right) dV(\boldsymbol{x}) \tag{A.34}$$

- **Flux total :**

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \right) dV(\boldsymbol{x}) \tag{A.34}$$

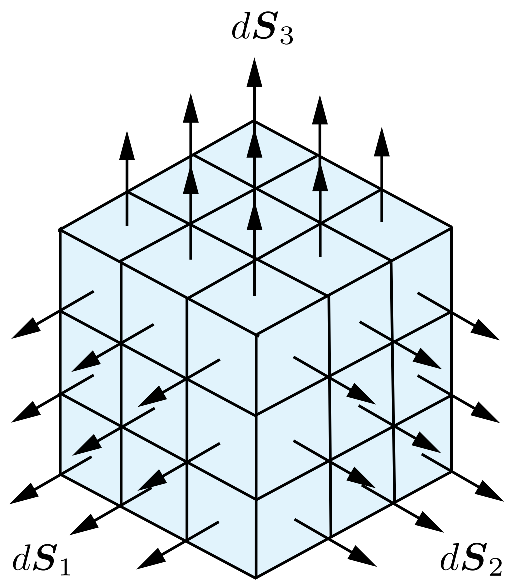
- **Divergence :** du champ vectoriel $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \tag{A.35}$$

- **Théorème local de la divergence :** du champ vectoriel $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$: (A.35) dans (A.34)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \Big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \Big) dV(\boldsymbol{x}) \tag{A.36}$$

Ce théorème est indépendant du choix de coordonnées (cartésiennes, cylindriques ou sphériques), car il est exprimé en termes de produits scalaires de vecteurs.



- **Théorème global de la divergence :** du champ vectoriel $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$: intégration de (A.36) sur le système global

$$\int_S \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \int_V \Big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\Big)\, dV(\boldsymbol{x}) \qquad \text{(A.37)}$$

- **Flux total :** l'intégration se fait sur l'ensemble du système global qui est constitué d'un continuum de cubes de volume infinitésimal dV. Les flux à travers toutes les faces des cubes à l'intérieur du système global s'annulent deux à deux. Ainsi, seuls les flux à travers les faces des cubes qui se trouvent sur l'enceinte du système contribuent au flux global.